**Метод Гаусса**

В формулах численного интегрирования Ньютона-Котеса используются равноотстоящие узлы. В случае квадратурных формул Гаусса узлы интегрирования http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image093.png на отрезке http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image051.png располагаются не равномерно, а выбираются таким образом, чтобы при наименьшем возможном числе узлов точно интегрировать многочлены наивысшей возможной степени.

http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image094.png           (2.17)

Узлы http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image093.pngявляются корнями полинома Лежандра степени *n*, а веса вычисляются интегрированием полиномов Лежандра по формуле http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image095.png, где http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image096.png – первая производная полинома Лежандра.

Узлы и веса, рассчитанные для отрезка http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image097.png, приводятся в таблице 2.2. Для интегрирования на произвольном частичном отрезке  необходимо пересчитать значения узлов для данного частичного отрезка http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image051.png:

http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image098.png           (2.18)

Квадратура Гаусса относится к квадратурам открытого типа. Это означает, что ни один и узлов не совпадает ни с одним из концов отрезка интегрирования *a* или *b*.

Веса квадратур Гаусса всегда положительны, и при увеличении числа узлов точность приближения почти всегда возрастает.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | *i* | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image019_0000.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image021_0000.png |
| 1 | 1 | 0 | 2 |
| 2 | 1 | -0.5773503 | 1 |
| 2 | 0.5773503 | 1 |
| 3 | 1 | -0.7745967 | 0.5555556 |
| 2 | 0 | 0.8888889 |
| 3 | 0.7745967 | 0.5555556 |
| 4 | 1 | -0.8611363 | 0.3478548 |
| 2 | -0.3399810 | 0.6521451 |
| 3 | 0.3399810 | 0.6521451 |
| 4 | 0.8611363 | 0.3478548 |
| 5 | 1 | -0.9061798 | 0.4786287 |
| 2 | -0.5384693 | 0.2369269 |
| 3 | 0 | 0.5688888 |
| 4 | 0.5384693 | 0.2369269 |
| 5 | 0.9061798 | 0.4786287 |
| 6 | 1 | -0.9324700 | 0.1713245 |
| 2 | -0.6612094 | 0.3607616 |
| 3 | -0.2386142 | 0.4679140 |
| 4 | 0.2386142 | 0.4679140 |
| 5 | 0.6612094 | 0.3607616 |
| 6 | 0.9324700 | 0.1713245 |

*Таблица 2.2. Весовые коэффициенты метода Гаусса*