**Методы Ньютона-Котеса**

**2.2.1. Метод прямоугольников**

Одним из простейших методов численного интегрирования является **метод прямоугольников**. На частичном отрезке  подынтегральную функцию заменяют полиномом Лагранжа нулевого порядка, построенным в одной точке. В качестве этой точки можно выбрать середину частичного отрезка . Тогда значение интеграла на частичном отрезке:

           (2.6)

Подставив это выражение в (2.4), получим составную формулу **средних прямоугольников**:

          (2.7)

Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рис.2.2(a). Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из *N* прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы *N*элементарных прямоугольников.

Формулу (2.7) можно представить в ином виде:

 или           (2.8)

Эти формулы называются формулой **левых и правых прямоугольников** соответственно. Графически метод левых и правых прямоугольников представлен на рис.2.2(б, в). Однако из-за нарушения симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, их погрешность значительно больше, чем в методе средних прямоугольников*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image_p001.png*а) средние прямоугольники* | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image_p002.png*б) левые прямоугольники* | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image_p003.png*в) правые прямоугольники* |
| *Рис.2.2. Интегрирование методом прямоугольников* |

**2.2.2. Метод трапеций**

Если на частичном отрезке  подынтегральную функцию заменить полиномом Лагранжа первой степени:

           (2.9)

то искомый интеграл на частичном отрезке запишется следующим образом:

           (2.10)

Тогда составная формула трапеций на всем отрезке интегрирования  примет вид:

           (2.11)

Графически метод трапеций представлен на рис.2.3. Площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из *N* трапеций, при этом кривая заменяется вписанной в нее ломаной. На каждом из частичных отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные значения, при этом площадь трапеции на каждом отрезке определяется по формуле 2.10.

Погрешность метода трапеций выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удается далеко не всегда.


*Рис.2.3. Интегрирование методом методом трапеций*

**2.2.3. Метод Симпсона**

В этом методе подынтегральная функция на частичном отрезке  аппроксимируется параболой, проходящей через три точки , , , то есть интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени:

           (2.12)

Проведя интегрирование, получим:

           (2.13)

Это и есть формула Симпсона или формула парабол. На отрезке  формула Симпсона примет вид:

             (2.14)

Если разбить отрезок интегрирования  на **четное** количество 2*N* равных частей с шагом , то можно построить параболу на каждом сдвоенном частичном отрезке  и переписать выражения (2.12-2.14) без дробных индексов. Тогда формула Симпсона примет вид:

             (2.15)

Графическое представление метода Симпсона показано на рис.2.4. На каждом из сдвоенных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой параболой.


*Рис.2.4.**Метод Симпсона*

**2.2.4. Семейство методов Ньютона-Котеса**

Выше были рассмотрены три схожих метода интегрирования функций – метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона. Их объединяет общая идея: интегрируемая функция интерполируется на отрезке интегрирования по равноотстоящим узлам многочленом Лагранжа, для которого аналитически вычисляется значение интеграла. Семейство методов, основанных на таком подходе, называется **методами Ньютона-Котеса**.

В выражении  коэффициенты  правильнее называть **весовыми коэффициентами**. Величину , определяющую погрешность численного интегрирования, называют **остатком**.

Для семейства методов Ньютона-Котеса можно записать общее выражение:

           (2.16)

где *n* – порядок метода Ньютона-Котеса, *N* – количество частичных отрезков, , , .

Из выражения (2.16) легко можно получить формулу прямоугольников для , формулу трапеций для , и формулу Симпсона для . Коэффициенты  могут быть заданы в табличной форме (таблица.2.1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image019.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image021.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image023.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image025_0000.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image027.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image029.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image031.png |
| 0 | **1** | 1 |   |   |   |   |   |
| 1 | **2** | 1 | 1 |   |   |   |   |
| 2 | **6** | 1 | 4 | 1 |   |   |   |
| 3 | **8** | 1 | 3 | 3 | 1 |   |   |
| 4 | **90** | 7 | 32 | 12 | 32 | 7 |   |
| 5 | **288** | 19 | 75 | 50 | 50 | 75 | 19 |

*Таблица 2.1. Весовые коэффициенты метода Ньютона-Котеса*