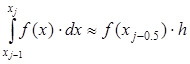
**Методы Ньютона-Котеса**

**2.2.1. Метод прямоугольников**

Одним из простейших методов численного интегрирования является **метод прямоугольников**. На частичном отрезке http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image051.png подынтегральную функцию заменяют полиномом Лагранжа нулевого порядка, построенным в одной точке. В качестве этой точки можно выбрать середину частичного отрезка http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image052.png. Тогда значение интеграла на частичном отрезке:

           (2.6)

Подставив это выражение в (2.4), получим составную формулу **средних прямоугольников**:

http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image054.png          (2.7)

Графическая иллюстрация метода средних прямоугольников представлена на рис.2.2(a). Из рисунка видно, что площадь криволинейной трапеции приближенно заменяется площадью многоугольника, составленного из *N* прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы *N*элементарных прямоугольников.

Формулу (2.7) можно представить в ином виде:

http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image055.png или http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image056.png          (2.8)

Эти формулы называются формулой **левых и правых прямоугольников** соответственно. Графически метод левых и правых прямоугольников представлен на рис.2.2(б, в). Однако из-за нарушения симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, их погрешность значительно больше, чем в методе средних прямоугольников*.*

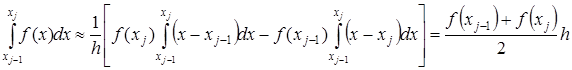
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image_p001.png *а) средние прямоугольники* | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image_p002.png *б) левые прямоугольники* | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image_p003.png *в) правые прямоугольники* |
| *Рис.2.2. Интегрирование методом прямоугольников* | | |

**2.2.2. Метод трапеций**

Если на частичном отрезке http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image051.png подынтегральную функцию заменить полиномом Лагранжа первой степени:

http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image061.png           (2.9)

то искомый интеграл на частичном отрезке запишется следующим образом:

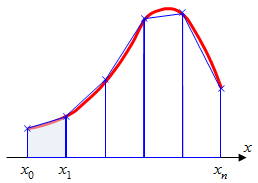
           (2.10)

Тогда составная формула трапеций на всем отрезке интегрирования http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image063.png примет вид:

http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image064.png           (2.11)

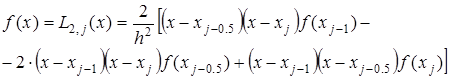
Графически метод трапеций представлен на рис.2.3. Площадь криволинейной трапеции заменяется площадью многоугольника, составленного из *N* трапеций, при этом кривая заменяется вписанной в нее ломаной. На каждом из частичных отрезков функция аппроксимируется прямой, проходящей через конечные значения, при этом площадь трапеции на каждом отрезке определяется по формуле 2.10.

Погрешность метода трапеций выше, чем у метода средних прямоугольников. Однако на практике найти среднее значение на элементарном интервале можно только у функций, заданных аналитически (а не таблично), поэтому использовать метод средних прямоугольников удается далеко не всегда.

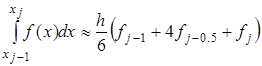
   
*Рис.2.3. Интегрирование методом методом трапеций*

**2.2.3. Метод Симпсона**

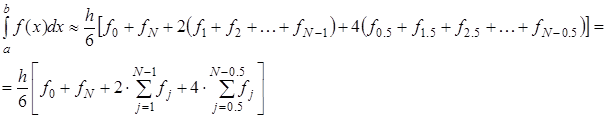
В этом методе подынтегральная функция на частичном отрезке http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image051.png аппроксимируется параболой, проходящей через три точки http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image066.png, http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image067.png, http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image068.png, то есть интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени:

           (2.12)

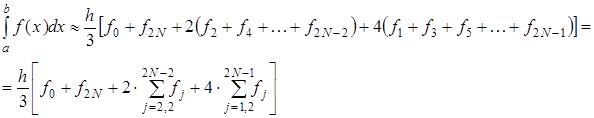
Проведя интегрирование, получим:

           (2.13)

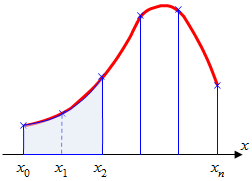
Это и есть формула Симпсона или формула парабол. На отрезке http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image047.png формула Симпсона примет вид:

             (2.14)

Если разбить отрезок интегрирования http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image072.png на **четное** количество 2*N* равных частей с шагом http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image073.png, то можно построить параболу на каждом сдвоенном частичном отрезке http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image051.png и переписать выражения (2.12-2.14) без дробных индексов. Тогда формула Симпсона примет вид:

             (2.15)

Графическое представление метода Симпсона показано на рис.2.4. На каждом из сдвоенных частичных отрезков заменяем дугу данной кривой параболой.

  
*Рис.2.4.**Метод Симпсона*

**2.2.4. Семейство методов Ньютона-Котеса**

Выше были рассмотрены три схожих метода интегрирования функций – метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона. Их объединяет общая идея: интегрируемая функция интерполируется на отрезке интегрирования по равноотстоящим узлам многочленом Лагранжа, для которого аналитически вычисляется значение интеграла. Семейство методов, основанных на таком подходе, называется **методами Ньютона-Котеса**.

В выражении http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image076.png коэффициенты http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image042.png правильнее называть **весовыми коэффициентами**. Величину http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image077.png, определяющую погрешность численного интегрирования, называют **остатком**.

Для семейства методов Ньютона-Котеса можно записать общее выражение:

http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image078.png           (2.16)

где *n* – порядок метода Ньютона-Котеса, *N* – количество частичных отрезков, http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image079.png, http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image080.png, http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image081.png.

Из выражения (2.16) легко можно получить формулу прямоугольников для http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image082.png, формулу трапеций для http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image083.png, и формулу Симпсона для http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image084.png. Коэффициенты http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/image085.png могут быть заданы в табличной форме (таблица.2.1).

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image019.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image021.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image023.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image025_0000.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image027.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image029.png | http://aco.ifmo.ru/el_books/numerical_methods/lectures/images/glava2_clip_image031.png |
| 0 | **1** | 1 |  |  |  |  |  |
| 1 | **2** | 1 | 1 |  |  |  |  |
| 2 | **6** | 1 | 4 | 1 |  |  |  |
| 3 | **8** | 1 | 3 | 3 | 1 |  |  |
| 4 | **90** | 7 | 32 | 12 | 32 | 7 |  |
| 5 | **288** | 19 | 75 | 50 | 50 | 75 | 19 |

*Таблица 2.1. Весовые коэффициенты метода Ньютона-Котеса*