**Статистическое оценивание и метод наибольшего правдоподобия**

Метод максимального правдоподобия — еще один разумный способ построения оценки неизвестного параметра. Состоит он в том, что в качестве «наиболее правдоподобного» значения параметра берут значение , максимизирующее вероятность получить при  опытах данную выборку . Это значение параметра  зависит от выборки и является искомой оценкой.

Решим сначала, что такое «вероятность получить данную выборку», т.е. что именно нужно максимизировать. Вспомним, что для абсолютно непрерывных распределений  их плотность  — «почти» (с точностью до ) вероятность попадания в точку . А для дискретных распределений  вероятность попасть в точку  равна . И то, и другое мы будем называть плотностью распределения . Итак,

**Определение 5.**

Функцию



мы будем называть плотностью распределения .

Для тех, кто знаком с понятием интеграла по мере, нет ничего странного в том, что мы ввели понятие плотности для дискретного распределения. Это — не плотность относительно меры Лебега, но плотность относительно считающей меры.

Если для дискретного распределения величины  со значениями , ,  ввести считающую меру  на борелевской -алгебре как





Если же  имеет абсолютно непрерывное распределение, то  есть привычная плотность относительно меры Лебега :



**Определение 6.**

Функция (случайная величина при фиксированном )



называется функцией правдоподобия. Функция (тоже случайная)



называется логарифмической функцией правдоподобия.

В дискретном случае функция правдоподобия  есть вероятность выборке , ,  в данной серии экспериментов равняться , , . Эта вероятность меняется в зависимости от :



**Определение 7.**

Оценкой максимального правдоподобия  неизвестного параметра  называют значение , при котором функция  достигает максимума (как функция от  при фиксированных ):



**Замечание 7.**

Поскольку функция  монотонна, то точки максимума  и  совпадают. Поэтому оценкой максимального правдоподобия (ОМП) можно называть точку максимума (по ) функции :



Напомним, что точки экстремума функции — это либо точки, в которых производная обращается в нуль, либо точки разрыва функции/производной, либо крайние точки области определения функции.

**Пример 7.**

Пусть , ,  — выборка объема  из распределения Пуассона , где . Найдем ОМП  неизвестного параметра .





Поскольку эта функция при всех  непрерывно дифференцируема по , можно искать точки экстремума, приравняв к нулю частную производную по . Но удобнее это делать для логарифмической функции правдоподобия:



Тогда



и точка экстремума  — решение уравнения: , то есть .

**Упражнение.**

**1)** Убедиться, что  — точка максимума, а не минимума.

**2)** Убедиться, что  совпадает с одной из оценок метода моментов. по какому моменту?

**Пример 8.**

Пусть , ,  — выборка объема  из нормального распределения , где , ; и оба параметра ,  неизвестны.

Выпишем плотность, функцию правдоподобия и логарифмическую функцию правдоподобия. Плотность:



функция правдоподобия:



логарифмическая функция правдоподобия:



В точке экстремума (по ) гладкой функции  обращаются в нуль обе частные производные:



Оценка максимального правдоподобия для  — решение системы уравнений



Решая, получим хорошо знакомые оценки:



**Упражнение.**

**1)** Убедиться, что ,  — точка максимума, а не минимума.

**2)** Убедиться, что эти оценки совпадают с некоторыми оценками метода моментов.

**Пример 9.**

Пусть , ,  — выборка объема  из равномерного распределения , где . Тогда  (см. [[**3**](https://nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/node67.html#cher), пример 4.4, с.24] или [[**1**](https://nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/node67.html#bor1), пример 5, с.91]).

**Пример 10.**

Пусть , ,  — выборка объема  из равномерного распределения , где  (см. также [[**1**](https://nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/node67.html#bor1), пример 4, с.91]).

Выпишем плотность распределения и функцию правдоподобия. Плотность:

![\begin{displaymath} f_{\theta}(y)=\begin{cases} 1/5, & \textrm{ если } y\in[\theta,\theta+5] \cr  0 & \textrm{ иначе}, \end{cases}\end{displaymath}]()

функция правдоподобия:





Функция правдоподобия достигает своего максимального значения  во всех точках ![$\theta\in[X_{(n)}-5, X_{(1)}]$](). График этой функции изображен на рис. [4](https://nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/node14.html#fig3b).

|  |
| --- |
| **Рис. 4:** Пример [10](https://nsu.ru/mmf/tvims/chernova/ms/lec/node14.html#ex9). |
| \begin{figure} \unitlength=0.8mm \begin{picture} (60.00,25.00)(0,-10) \put(5.00,...  ...0.00,35.00){\makebox(0,0)[lc]{$f({\mathbf X},\theta)$}}\end{picture}\end{figure} |

Любая точка может служить оценкой максимального правдоподобия. Получаем более чем счетное число оценок вида



при разных ![$\alpha\in [0,\,1]$](), в том числе и  ,  — концы отрезка.

**Упражнение.**

**1)** Убедиться, что отрезок ![$[X_{(n)}-5, X_{(1)}]$]() не пуст.

**2)** Найти оценку метода моментов (по первому моменту) и убедиться, что она иная по сравнению с ОМП. 3) Найти ОМП параметра  равномерного распределения .